# Calculs élémentaires sur les radicaux

*Note : ce cours suppose la maîtrise du développement, de la factorisation, des identités remarquables (en particulier $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$) et des règles de calcul sur les puissances.*

## I) Qu'est-ce que la racine carrée ?

### 1) Définition

La racine carrée d'un nombre **positif** a, notée $\sqrt{a}$, est **l'unique nombre positif** tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Il n'existe pas de racine carrée pour des nombres négatifs*.

**enfin, si  mais les racines carrées ne sont plus réelles*

### 2) Application aux équations de la forme $x^2=a$

Soit un nombre réel  a et l'on recherche tous les réels  x tels que $x^2=a$. Plusieurs cas se présentent en fonction du signe de a :

- Si a<0, il n'y a **pas de solution**
- Si a=0, 0 est **l'unique solution**
- Si a>0, $\sqrt{a}$ est solution mais $-\sqrt{a}$ aussi car $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = (-1)^2 * \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Donc $\sqrt{a}$ **et** $-\sqrt{a}$ sont les solutions de l'équation.

*Autre démonstration : si a>0, $x^2=a$ donc $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$ soit (identité remarquable) : $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0$, on retrouve les deux solutions $\pm\sqrt{a}$.*

### 3) Exemples : $x^2=16$ ; $x^2=0$ ; $x^2=12$ ; $x^2=-1$ ; $x^2=a^2+b^2$ ; $x^2=b-a$ ; $x^2=1089$ ; $x^2=\sqrt{a}$.

## II) Opérations sur les racines carrées

### 1) Produit

Attention ! Il faut s'assurer de **l'existence des racines carrées** en question pour appliquer la formule suivante **: pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$**. En effet, si a ou b sont négatifs, alors **ni $\sqrt{a}$ ni $\sqrt{b}$ n'existent** ! Or si a et b sont négatifs, ab>0 donc **$\sqrt{ab}$ existe.**

### 2) Somme

Il n'y a **pas de formule** exprimant un somme de racines carrées en fonction d'une autre racine carrée. Par exemple, en règle générale **$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$.**

### 3) $\sqrt{x^2}$

Un autre piège consiste à dire que $\sqrt{x^2} = x$, ce qui n'est vrai **que si x est positif**. Rappelons qu'une racine carrée est **toujours positive** donc  si x<0, $\sqrt{x^2} \neq x$. En fait, si x<0, $\sqrt{x^2} = -x$. Dans le cas général, on appelle $\sqrt{x^2}$ la **valeur absolue** de x. C'est un nombre positif, noté $|x|$, qui mesure « la distance à zéro ». Il s'agit en quelque sorte du nombre dépourvu de son signe.

# III) Techniques calculatoires

## 1) Simplification de radicaux

On cherche la plupart du temps à simplifier les radicaux $\sqrt{x}$ sous la forme $\boldsymbol{a\sqrt{b}}$ avec **b le plus petit possible**. Pour s'aider, on peut **décomposer x en facteurs premiers** et faire apparaître le maximum de carrés sous la racine pour les sortir de la racine. Voir les exercices.

## 2) Réécriture de fraction

Ne me demande pas pourquoi, mais on n'apprécie pas d'avoir des radicaux au dénominateur d'une fraction. Pour ce faire, on écrit une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}*\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$. A refaire en exercice…

## 3) Quantités conjuguées

On cherche souvent à simplifier des fractions de la forme $\frac{1}{a+\sqrt{b}}$. Pour ce faire on utilise l'identité remarquable $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$ : $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$. On appelle $a+\sqrt{b}$ et $a-\sqrt{b}$ des **quantités conjuguées** car leur produit donne un nombre simple, sans radicaux. A apprendre par la pratique !